

Analisis Dinamik Tabung Kontinu dengan Metode Beda Hingga

Nurchaya Nugraha^{1,a}, and Jamiatul Akmal^{2,b*}

¹Mahasiswa Magister Teknik Mesin, Fakultas Teknik Universitas Lampung

²Jurusan Teknik Mesin, Fakultas Teknik Universitas Lampung

Jl. Prof. Dr. Sumantri Brojonegoro No.1, Kota Bandar Lampung, 35145

^aE-mail: nurchayanugraha11@gmail.com

^{b,*}E-mail: jamiatul.akmal@eng.unila.ac.id (corresponding author)

Abstract

Continuous tube structures have been used in various building structures such as piles, pipes, tunnels, and bridges. Dynamic analysis is needed to determine the behavior of the structure against the load it receives. The analysis process begins by formulating the equation of motion of the continuous tube structure based on the Euler-Bernoulli beam theory. A case study is provided in the form of a continuous tube structure with a simply supported given a concentrated harmonic load. The analytical solution is obtained by the variable separation or mode superposition method. As an alternative, a numerical solution is carried out using the finite difference method. The displacement obtained from the variable separation method shows exact results. The finite difference method produces results that are close to the analytical solution. The accuracy of the finite difference method is strongly influenced by the grid spacing Δx and time step Δt .

Keywords: continuous tube, Euler-Bernoulli beam, finite difference.

Abstrak

Struktur tabung kontinu telah digunakan di berbagai struktur bangunan seperti tiang, pipa, tunnel dan jembatan. Dibutuhkan analisis dinamik untuk mengetahui perilaku struktur terhadap beban yang diterimanya. Proses analisis dimulai dengan memformulasikan persamaan gerak struktur tabung kontinu berdasarkan teori Euler-Bernoulli beam. Disediakan studi kasus berupa struktur tabung kontinu dengan tumpuan sederhana yang diberikan beban harmonik terpusat. Solusi analitik diperoleh melalui metode pemisahan variabel atau superposisi mode. Sebagai alternatif, dilakukan penyelesaian secara numerik menggunakan metode beda hingga tengah. Displacement yang diperoleh dari metode pemisahan variabel menunjukkan hasil yang eksak. Metode beda hingga tengah menghasilkan hasil yang mendekati solusi analitik. Akurasi dari metode beda hingga sangat dipengaruhi oleh jarak grid Δx dan langkah waktu Δt .

Keywords: tabung kontinu, Euler-Bernoulli beam, beda hingga.

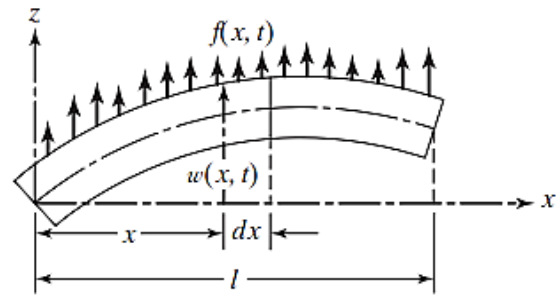
PENDAHULUAN

Dalam analisis dinamik struktur mekanik, struktur tabung kontinu memiliki kegunaan yang cukup luas. Struktur ini dapat digunakan sebagai tiang pancang, pipa memanjang dan *tunnel*. Sistem kontinu memiliki derajat kebebasan yang tak terhingga, sehingga penyelesaian secara analitik relatif lebih sulit untuk struktur yang kompleks. Beberapa penelitian telah mengkaji solusi analitik. Persamaan yang merepresentasikan struktur tabung kontinu dapat digunakan untuk memodelkan *tunnel* [1] dan jembatan [2], [3]. Struktur kontinu juga dapat digunakan untuk memodelkan jalur kereta api. Melalui pemodelan *beam on elastic foundation* (BOEF), analisis dinamik jalur kereta api dapat dilakukan [4]. Aplikasi struktur kontinu dapat digunakan untuk memodelkan massa yang bergerak di atas struktur [5].

Berbagai macam struktur pada sistem mekanik berbentuk kompleks dan sulit untuk diselesaikan secara analitik. Penyelesaian secara analitik dapat dilakukan dengan mengasumsikan struktur kompleks menjadi struktur dasar yang sederhana berupa *beam*. Salah satu cara lain untuk mendapatkan solusi pada struktur tabung kontinu adalah menggunakan metode numerik berupa integrasi langsung (*direct integration*). Melalui penyelesaian secara numerik, struktur tabung kontinu dibagi menjadi beberapa bagian yang terhingga. Pada studi ini dilakukan analisis dinamik tabung kontinu dengan tumpuan sederhana (*simply supported*) yang diberikan beban harmonik.

MODEL DAN ANALISIS

Struktur tabung kontinu pada umumnya merupakan struktur *beam* memanjang yang memperoleh beban secara lateral. Untuk mempertahankan posisinya, struktur tabung kontinu dihubungkan pada tumpuan sederhana, *fixed* atau *free* di kedua ujungnya. Sementara kekakuan struktur diperoleh dari kekakuan *bending* tabung tersebut. Berdasarkan kondisi ini, struktur tabung kontinu dapat dianggap sebagai model *beam* Euler-Bernoulli seperti yang ditunjukkan pada Gambar 1.



Gambar 1. Struktur *beam* Euler-Bernoulli.

Berdasarkan teori *beam* Euler-Bernoulli diasumsikan bahwa panjang SFT jauh lebih besar dibandingkan ukuran penampang, *displacement* tidak terlalu besar, mengabaikan inersia putar dan mengabaikan deformasi geser [6]. Persamaan diferensial parsial yang digunakan untuk memformulasikan persamaan gerak dari SFT dinyatakan dengan persamaan (1) [7]. Di mana w adalah *displacement*, EI adalah kekakuan *bending*, ρA adalah massa per satuan panjang dan f adalah gaya eksternal. Persamaan (1) dapat diselesaikan secara analitik maupun numerik.

$$EI \frac{\partial^4 w}{\partial x^4}(x, t) + \rho A \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}(x, t) = f(x, t) \quad (1)$$

Persamaan (1) merupakan persamaan diferensial parsial. Secara umum persamaan ini diselesaikan dengan cara pemisahan variabel x dan t . Kemudian kedua variabel diperoleh solusinya masing-masing, sehingga *displacement* dapat dinyatakan dengan persamaan (2). Di mana $W(x)$ adalah normal mode dan $q(t)$ adalah fungsi waktu.

$$w(x, t) = W(x) q(t) \quad (2)$$

Substitusikan persamaan (2) ke persamaan (1) pada kondisi getaran bebas ($f(x, t) = 0$), sehingga diperoleh dua persamaan dengan masing-masing variabel x dan t , seperti yang

ditunjukkan persamaan (3) dan (4). Di mana $\beta^4 = \omega^2/c^2$ dan $c = \sqrt{EI/\rho A}$. Persamaan (4) merupakan persamaan diferensial biasa orde dua yang identik dengan persamaan getaran ebas satu derajat kebebasan, sehingga diperoleh solusi yang dinyatakan pada persamaan (5). Di mana A dan B adalah konstanta yang diperoleh dari kondisi awal (kecepatan dan *displacement* pada $t = 0$).

$$\frac{d^4 W(x)}{dx^4} - \beta^4 W(x) = 0 \quad (3)$$

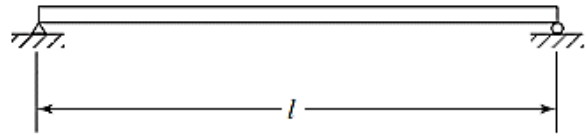
$$\frac{d^2 q(t)}{dt^2} - \omega^2 q(t) = 0 \quad (4)$$

$$q_n(t) = A \cos \omega_n t + B \sin \omega_n t \quad (5)$$

Solusi dari persamaan (3) diperoleh dengan mengasumsikan $W(x) = Ce^{sx}$ kemudian menyubstitusikannya ke persamaan (3), sehingga diperoleh solusi sebagaimana yang ditunjukkan oleh persamaan (6). Di mana konstanta C_1, C_2, C_3 dan C_4 dapat diperoleh dari kondisi batas.

$$W(x) = C_1 \cosh \beta x + C_2 \sinh \beta x \dots + C_3 \cos \beta x + C_4 \sin \beta x \quad (6)$$

Pada studi ini digunakan tabung kontinu dengan kondisi batas tumpuan sederhana (*simply supported beam*) pada kedua ujungnya seperti yang ditunjukkan pada Gambar 2. Pada kondisi ini *displacement* dan momen di kedua ujung tabung kontinu bernilai nol, sehingga dapat dinyatakan dengan persamaan (7) dan (8). Dengan menerapkan kondisi batas pada persamaan (6), maka diperoleh persamaan (9).



Gambar 2. *Beam* dengan tumpuan sederhana.

$$w(x=0) = w(x=l) = 0 \quad (7)$$

$$M(x=0) = M(x=l) = 0 \quad (8)$$

$$W_n(x) = \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \quad (9)$$

Karena solusi dari $W(x)$ dan $T(t)$ sudah diketahui, maka solusi *displacement* keseluruhan diperoleh dengan menyubstitusikan persamaan (5) dan (9) ke persamaan (2). Persamaan (2) dapat dituliskan kembali menjadi persamaan (10). Di mana $W_n(x)$ adalah normal mode pada mode getar ke- n dan $q_n(t)$ adalah fungsi waktu. Solusi *displacement* pada persamaan (10) merupakan superposisi dari normal mode $W_n(x)$, sehingga metode ini disebut juga sebagai metode superposisi mode.

$$w(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} W_n(x) q_n(t) \quad (10)$$

Pada kasus tabung kontinu dengan disertai pembebanan eksternal, gaya yang bekerja pada struktur harus dipertimbangkan. Substitusikan persamaan (10) ke persamaan (1) pada kondisi getaran paksa ($f(x,t) \neq 0$), dengan mempertimbangkan persamaan (3) sehingga dihasilkan persamaan (11).

$$\rho A \sum_{n=1}^{\infty} \omega_n^2 W_n(x) q_n(t) \dots \quad (11)$$

$$+\rho A \sum_{n=1}^{\infty} W_n(x) \frac{d^2 q_n(t)}{dt^2} = f(x, t)$$

Dengan mengalikan persamaan (11) dengan $W_n(x)$ dan diintegrasikan dari 0 sampai l , terapkan kondisi ortogonalitas $\left(\int_0^l \rho A W_n^2(x) dx = 1\right)$ [8], sehingga diperoleh persamaan (12). Di mana $Q_n(t)$ merupakan bentuk lain dari gaya eksternal, seperti ditunjukkan pada persamaan (13). ω_n pada persamaan (12) merupakan frekuensi alami yang dapat dihitung menggunakan persamaan (14) [9]. Persamaan (12) merupakan persamaan diferensial biasa, sehingga dapat diselesaikan secara analitik. Selanjutnya untuk memperoleh solusi *displacement* keseluruhan, substitusikan nilai $q_n(t)$ ke persamaan (10).

$$\frac{d^2 q_n(t)}{dt^2} + \omega_n^2 q_n(t) = Q_n(t) \quad (12)$$

$$Q_n(t) = \int_0^l W_n(x) f(x, t) dx \quad (13)$$

$$\omega_n = \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 \sqrt{\frac{EI}{\rho A}} \quad (14)$$

PENDEKATAN NUMERIK

Metode numerik digunakan untuk memperoleh solusi pendekatan persamaan (1) yang merupakan persamaan diferensial parsial. Salah satu metode numerik yang dapat digunakan untuk melakukan pendekatan adalah metode beda hingga (*finite difference*) [10]. Pada studi ini secara spesifik digunakan metode beda hingga tengah (*central finite difference*). Metode ini didasarkan pada deret Taylor seperti yang ditunjukkan pada persamaan (15) dan (16).

$$x_{i+1} = x_i + (\Delta x)x'_i + \frac{(\Delta x)^2}{2!}x''_i + \frac{(\Delta x)^3}{3!}x'''_i + \dots \quad (15)$$

$$x_{i+1} = x_i - (\Delta x)x'_i + \frac{(\Delta x)^2}{2!}x''_i - \frac{(\Delta x)^3}{3!}x'''_i + \dots \quad (16)$$

Dari persamaan (15) dan (16) dapat diperoleh solusi pendekatan persamaan diferensial orde kedua dan keempat, seperti yang ditunjukkan pada persamaan (17) dan (18).

$$x''_i = \frac{x_{i+1} - 2x_i + x_{i-1}}{(\Delta x)^2} \quad (17)$$

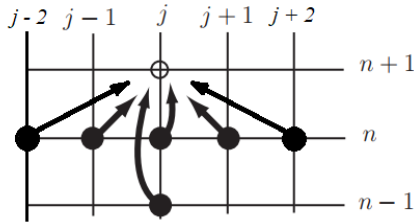
$$x^{(iv)}_i = \frac{x_{i+2} - 4x_{i+1} + 6x_i - 4x_{i-1} + 4x_{i-2}}{(\Delta x)^4} \quad (18)$$

Berdasarkan bentuk persamaan (17) dan (18), persamaan (1) dapat ditulis ulang menjadi persamaan (19). Variabel jarak x dinyatakan dengan notasi j sehingga $x = j \times \Delta x$. Variabel waktu t dinyatakan dengan notasi n sehingga $t = n \times \Delta t$. Melalui operasi aljabar, untuk memperoleh nilai *displacement* pada satu langkah waktu berikutnya, persamaan (19) dapat dituliskan kembali menjadi persamaan (20). Dengan Δx adalah jarak *grid* sepanjang tabung kontinu, Δt adalah langkah waktu dan nilai $\mu^2 = EI(\Delta t)^2 / \rho A(\Delta x)^4$. Nilai μ^2 berpengaruh terhadap stabilitas proses perhitungan. Untuk mendapatkan hasil yang stabil maka harus memenuhi $\mu \leq 1$. Skema numerik dari persamaan (20) dapat digambarkan sebagaimana ditampilkan pada Gambar 3.

$$EI \frac{w_{j+2}^n - 4w_{j+1}^n + 6w_j^n - 4w_{j-1}^n + w_{j-2}^n}{(\Delta x)^4} + \rho A \frac{w_j^{n+1} - 2w_j^n + w_j^{n-1}}{(\Delta t)^2} = f(x, t) \quad (19)$$

$$w_j^{n+1} = 2w_j^n - w_j^{n-1} - \mu^2 (w_{j+2}^n - 4w_{j+1}^n + 6w_j^n - 4w_{j-1}^n + w_{j-2}^n) + \frac{(\Delta t)^2}{\rho A} f(x, t) \quad (20)$$

1.



Gambar 3. Skema numerik metode beda hingga tegah.

Berdasarkan Gambar 3, untuk memperoleh nilai baru pada waktu $n + 1$, dibutuhkan setidaknya 6 nilai *displacement* yang sudah diketahui. Tetapi ketika melakukan perhitungan langkah pertama $n + 1$, data defleksi yang tersedia hanya pada kondisi awal saat n ($t = 0$), tetapi data $n - 1$ tidak tersedia. Hal ini dapat diatasi dengan cara melakukan pendekatan beda hingga tengah pada kondisi awal kecepatan $t = 0$, sehingga $\dot{w}_0$ dapat dinyatakan pada persamaan (21). Melalui persamaan (21) nilai w_j^{-1} dapat diperoleh dengan persamaan berikut ini.

$$\dot{w}_0 = \frac{w_j^1 - w_j^{-1}}{(\Delta t)^2} \quad (21)$$

$$w_j^{-1} = w_j^1 - \dot{w}_0 (\Delta t)^2 \quad (22)$$

Pada tabung kontinu dengan tumpuan sederhana, kondisi batas pada kedua ujungnya tidak terjadi *displacement* dan momen *bending* yang secara berturut-turut dinyatakan dengan persamaan (23) dan (24).

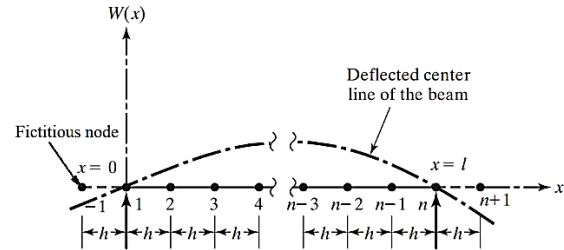
$$w_1^n = w_{end}^n = 0 \quad (23)$$

$$\frac{d^2 w}{dx^2} = \frac{w_2^n - 2w_1^n + w_{-1}^n}{(\Delta x)^2} = 0 \quad (24)$$

Untuk memperoleh nilai *displacement* pada semua *grid x*, maka dibutuhkan *node* fiksi untuk

merepresentasikan *grid* pada $x = -1$ dan $x = n + 1$ yang terletak di sebelah luar dari ujung-ujung *beam*, seperti yang ditunjukkan pada Gambar 4. *Node* fiksi diperoleh dengan menyubstitusikan persamaan (23) ke (24) sehingga diperoleh persamaan.

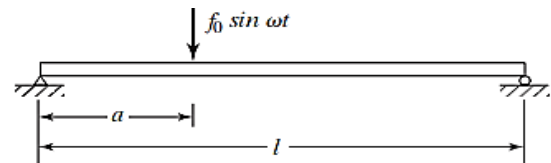
$$w_{-1}^n = -w_2^n \quad (25)$$



Gambar 4. Pembagian *grid x* pada tabung kontinu tumpuan sederhana.

STUDI KASUS

Pada studi ini ditinjau sebuah tabung kontinu yang memiliki tumpuan sederhana seperti ditunjukkan pada Gambar 5. Tabung kontinu tersebut diberikan gaya terpusat pada tengah sisi tabung selama 20 detik. Nilai dari properti tabung kontinu dapat dilihat pada Tabel 1. Beberapa asumsi yang digunakan adalah tabung tersebut bersifat homogen sepanjang strukturnya dan gaya berat struktur diabaikan. Untuk memperoleh solusi *displacement w* digunakan metode analitik (superposisi mode) dan metode numerik (beda hingga tengah). Proses komputasi dilakukan dengan *software* MATLAB.



Gambar 5. Tabung kontinu dengan beban harmonik

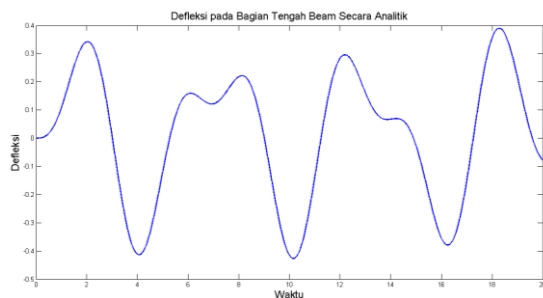
Tabel 1. Properti Tabung Kontinu

Properti	Nilai
Panjang (l)	2 m
Area (A)	0.03 m ²
Momen inersia (I)	2.25×10 ⁻⁴ m ⁴

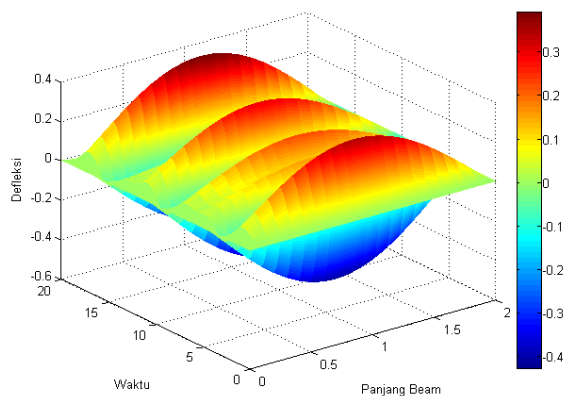
Densitas (ρ)	$70,3 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$
Modulus elastisitas (E)	$20,5 \times 10^4 \text{ N/m}^2$
Gaya eksternal (f_o)	100 N
Jarak gaya (a)	1 m
Frekuensi gaya (ω)	2 rad/s
Langkah waktu (Δt)	0,01 s
Jarak grid (Δx)	0,1 m

HASIL DAN PEMBAHASAN

Solusi analitik didapatkan dengan menggunakan metode superposisi mode. Nilai *displacement* pada *midspan* tabung ($x = 1$) ditampilkan pada Gambar 6. *Displacement* maksimum sebesar 0,4 m. Terlihat bahwa tabung kontinu bergerak secara harmonik mengikuti gaya eksternal yang bekerja. *Displacement* keseluruhan ditampilkan pada Gambar 7. Dalam memperoleh solusi analitik dibutuhkan usaha untuk memformulasikan solusi persamaan diferensial parsial. Hal ini merupakan salah satu kekurangan metode analitik di mana jika ditemui struktur yang lebih kompleks, proses formulasi solusi analitik menjadi lebih kompleks.

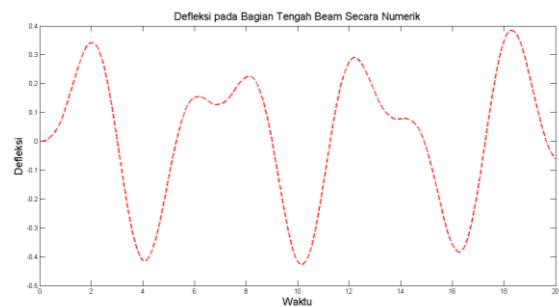


Gambar 6. *Displacement* pada bagian *midspan* (analitik)

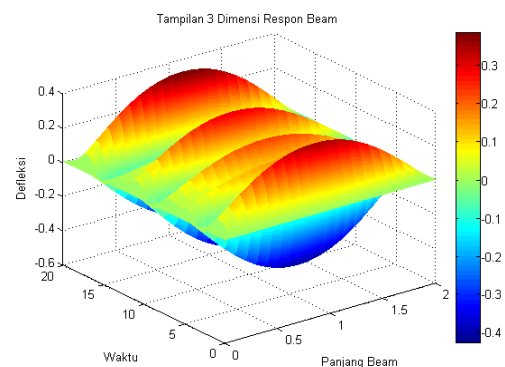


Gambar 7. Solusi *displacement* keseluruhan tabung kontinu (analitik)

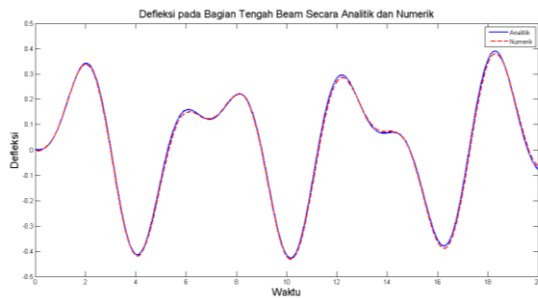
Solusi numerik diperoleh menggunakan metode beda hingga tengah. Nilai *displacement* pada *midspan* tabung ($x = 1$) ditampilkan pada Gambar 8 sedangkan solusi numerik keseluruhan ditampilkan pada Gambar 9. Berdasarkan hasil numerik yang didapat, terlihat hasilnya tidak memiliki perbedaan yang signifikan dibandingkan dengan solusi analitik, seperti yang ditampilkan pada Gambar 10. Solusi numerik memiliki kelebihan karena lebih fleksibel. Semakin kompleks struktur dan pembebanan pada tabung kontinu, proses penyelesaian masih sama. Yang menentukan keakuratan dari metode numerik adalah penentuan jarak grid Δx dan langkah waktu Δt yang sekecil mungkin. Semakin kecil jarak grid dan langkah waktu berpengaruh terhadap proses komputasi (semakin banyak iterasi). Hal ini tentunya dapat diatasi dengan penggunaan program komputer seperti MATLAB.



Gambar 8. *Displacement* pada bagian *midspan* (numerik)



Gambar 9. Solusi *displacement* keseluruhan tabung kontinu



Gambar 10. Perbandingan solusi analitik dan numerik

KESIMPULAN

Berdasarkan perhitungan yang telah dilakukan, metode analitik memberikan hasil yang akurat tetapi lebih sulit dalam memformulasikan solusi, tiap kondisi awal dan kondisi batas yang berbeda memiliki solusi akhir yang berbeda. Metode numerik dengan menggunakan metode beda hingga tengah (*central finite difference*) memberikan hasil yang mendekati dengan solusi analitik. Metode numerik memiliki batasan yaitu $\mu \leq 1$ untuk memperoleh hasil yang konvergen oleh sebab itu nilai Δt ditentukan sekecil mungkin, semakin kecil Δt maka perhitungan semakin akurat tetapi membutuhkan biaya perhitungan yang lebih besar atau daya komputer yang lebih besar. Baik metode analitik maupun numerik dapat digunakan untuk mendapatkan solusi getaran *beam* kontinu yang diberikan beban harmonik.

UCAPAN TERIMA KASIH

Ucapan terimakasih disampaikan kepada Laboratorium Mekanika Struktur Jurusan Teknik Mesin Universitas Lampung atas semua fasilitas yang diberikan.

DAFTAR PUSTAKA

- [1] M. Dong, F. Ge, S. Zhang, dan Y. Hong, "Dynamic equations for curved submerged floating tunnel," *Appl. Math. Mech.*, vol. 28, no. 10, Art. no. 10, Okt 2007, doi: 10.1007/s10483-007-1003-z.
- [2] L. Wan, D. Jiang, dan J. Dai, "Numerical Modelling and Dynamic Response Analysis of Curved Floating Bridges with a Small Rise-Span Ratio," *J. Mar. Sci. Eng.*, vol. 8, no. 6, hlm. 467, Jun 2020, doi: 10.3390/jmse8060467.
- [3] B. Supriyadi, "Analisis Kuat Layan Struktur Atas Jembatan (Balok Menerus) Akibat Runtuhnya Salah Satu Pilar Jembatan (Studi Kasus Jembatan Gantiwarno, Klaten, Jawa Tengah)," *Din. Tek. Sipil*, vol. 8, no. 2, hlm. 170–175, 2008.
- [4] A. Prativi dan W. T. Adi, "Evaluasi Kekuatan Rel UIC54 Menggunakan Metode Beam On Elastic Foundation (BOEF)," *J. Perkeretaapi. Indones. Indones. Railw. J.*, vol. 4, no. 2, hlm. 117–123, Des 2020, doi: 10.37367/jpi.v4i2.101.
- [5] M. Ichikawa, Y. Miyakawa, dan A. Matsuda, "Vibration analysis of the continuous beam subjected to a moving mass," *J. Sound Vib.*, vol. 230, no. 3, hlm. 493–506, 2000.
- [6] S. S. Rao, *Vibration of Continuous Systems*, Second Edition. Wiley, 2019.
- [7] S. S. Rao, *Mechanical Vibrations*. Pearson Education, Incorporated, 2017.
- [8] P. A. Hassanpour, E. Esmailzadeh, W. L. Cleghorn, dan J. K. Mills, "Generalized orthogonality condition for beams with intermediate lumped masses subjected to axial force," *J. Vib. Control*, vol. 16, no. 5, hlm. 665–683, 2010.
- [9] G. Nugroho, "Pengaruh Mode Shape Frekuensi Alami terhadap Estimasi Gaya Tarik Batang Baja dengan Metode Vibrasi," *Semesta Tek.*, vol. 21, no. 2, hlm. 198–205, 2018.
- [10] S. C. Chapra dan R. P. Canale, *Numerical methods for engineers*, Seventh edition. New York, NY: McGraw-Hill Education, 2015.

